

Modélisation géométrique

ES – Synthèse d'Image pour la réalité virtuelle

SIRV-2017

<http://people.mines-paristech.fr/olivier.stab/geomodeling.pdf>
<http://people.mines-paristech.fr/olivier.stab/SIRV>


Modélisation-géométrique - O.Stab 1

Modélisation géométrique et infographie

1. Introduction
2. L'organisation d'une scène
3. Les modèles géométriques
 - Surfaces implicites
 - Enumération spatiale et images
 - Structure et opérateurs
 - Autres approches
 - Représentation frontière
4. Infographie 3D
 - Introduction
 - Le rendu : éclairage, couleur, texture...
 - Image : caméra, parties cachées, pixelisation...
 - Le lancé de rayon : PovRay...

Modélisation-géométrique - O.Stab 2


Historique et applications



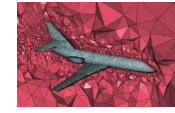
1960

CFAO : automobile, aéronautique...

Le calcul et la visualisation scientifique



Amiga RayTracer




Les jeux, la RV, la robotique...


concevoir, fabriquer, calculer, simuler, visualiser, manipuler...

1990


Internet, TV, cinéma, art et culture, mode...



Blender




Virtools



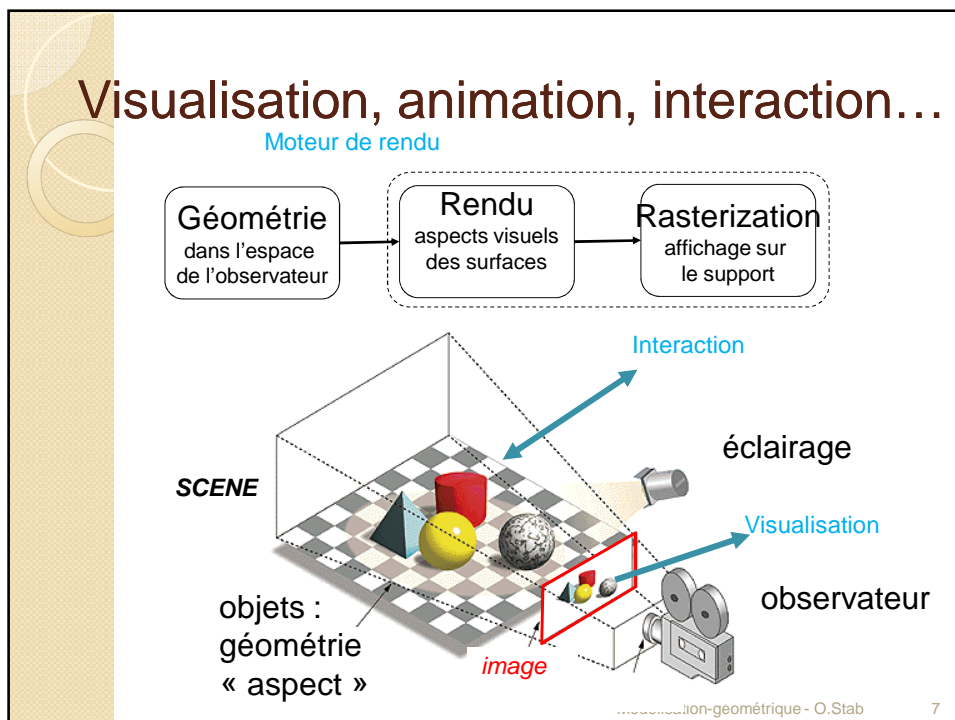
Unity Unreal

2017

Scan et impression 3D

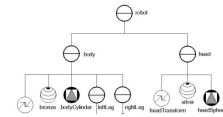
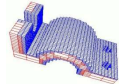
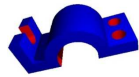


5

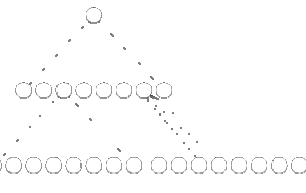
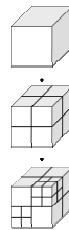
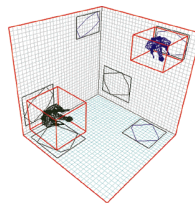
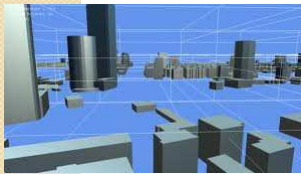


Deux besoins

- Modèles mathématiques et informatiques pour décrire la scène : $F(x,y,z)=0...$



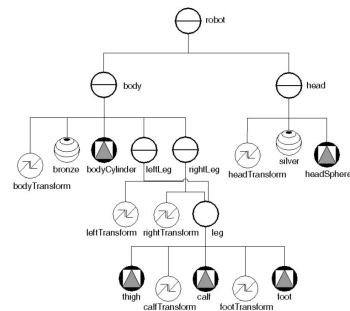
- Algorithmes + structures d'accès pour les « moteurs »



Modélisation-géométrique - O.Stab

11

2. ORGANISATION D'UNE SCÈNE

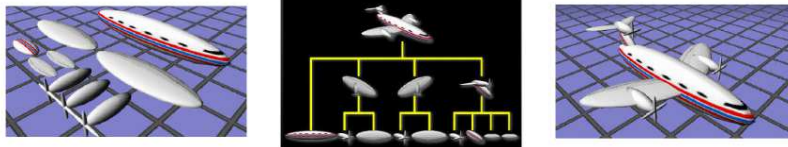


Modélisation-géométrique - O.Stab

12

2.1 Organisation d'une scène

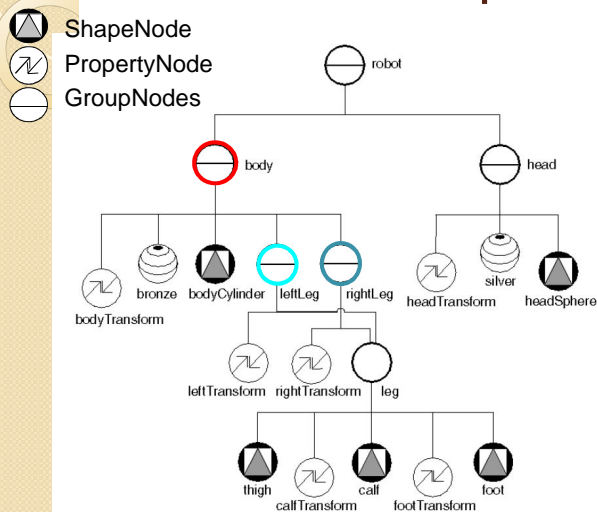
- Le « Scene Graph » : modèle hiérarchique (1988 PHIGS, 1992 Inventor, 1991 VRML.1... X3D)
- Exemples : VRML, Inventor, Java3D, OpenSG, SVG, Three.js (WebGL), ...
- Les moteurs « engine » (parcours du scene graph) pour le Rendu, l'Animation, physique...
- Logiciels : Ogre3D, Cortona, Unity, CorelDraw...



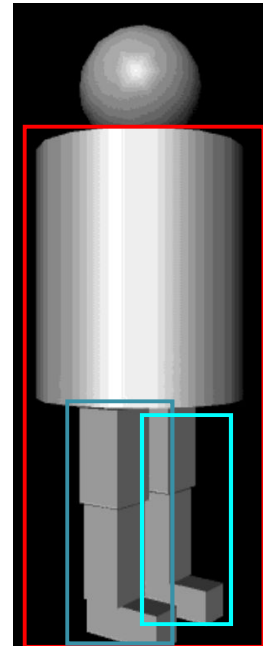
Modélisation-géométrique - O.Stab

13

Scene Graph






Exemple Inventor

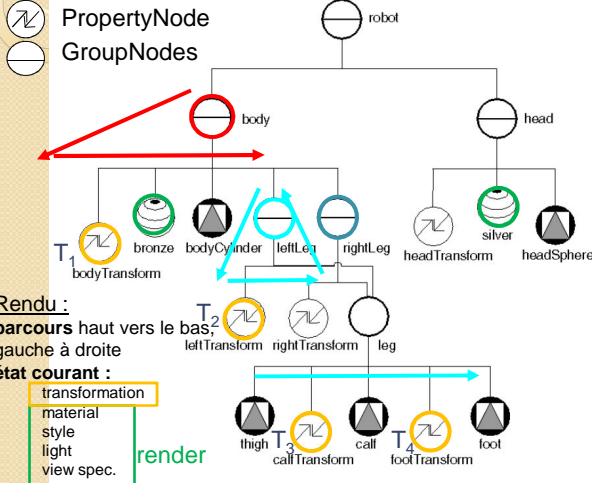


Modélisation-géométrique - O.Stab

14

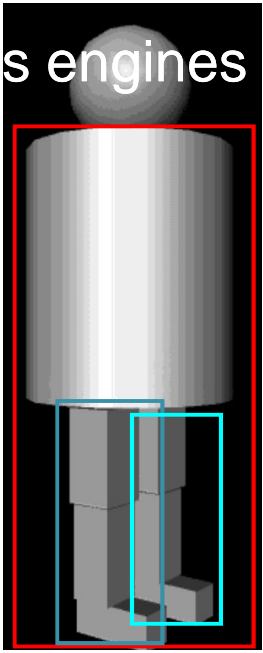
SG : le parcours des engines

 ShapeNode
 PropertyNode
 GroupNodes



Rendu :
 parcours haut vers le bas,
 gauche à droite
état courant :
 transformation
 material
 style
 light
 view spec.
 ...

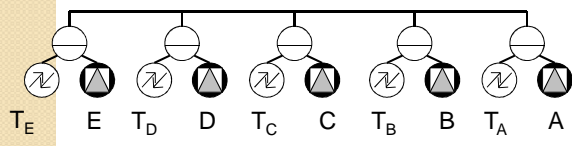
render

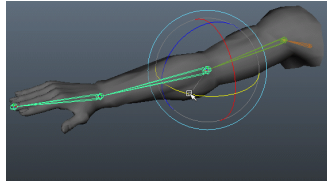


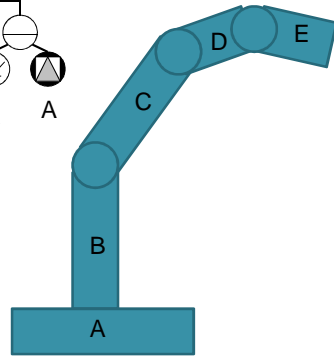
Modélisation-géométrique - O.Stab 15

Positionnement et orientation absolu

Corriger l'arbre pour pouvoir animer le bras



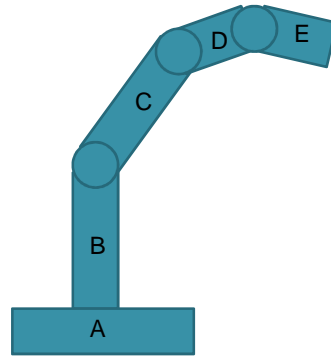
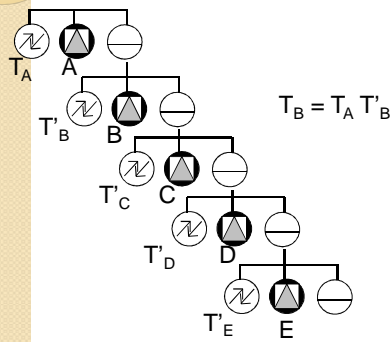




Modélisation-géométrique - O.Stab 17

Positionnement et orientation relatifs

Arbre pour pouvoir animer le bras



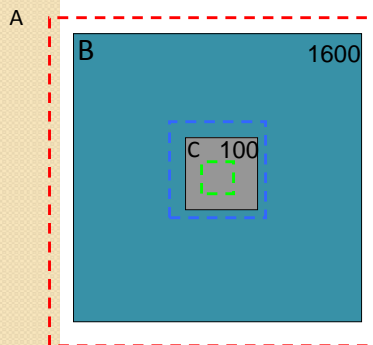
$$T_B = T_A T'_B$$

Calculez les transformations T'_x à partir des T_x

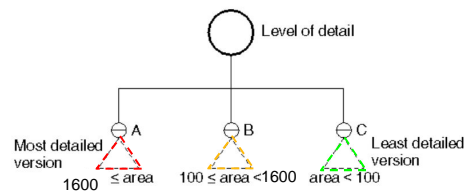
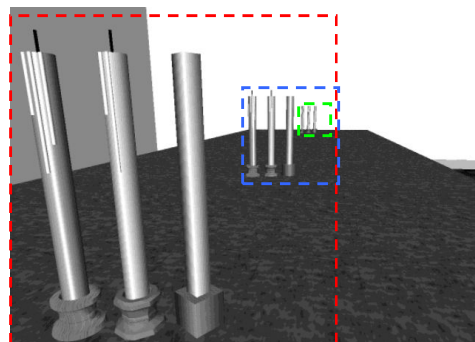
Montrez que : $T'_E = (T_D)^{-1} T_E$

Switch Node : Level Of Detail (LOD)

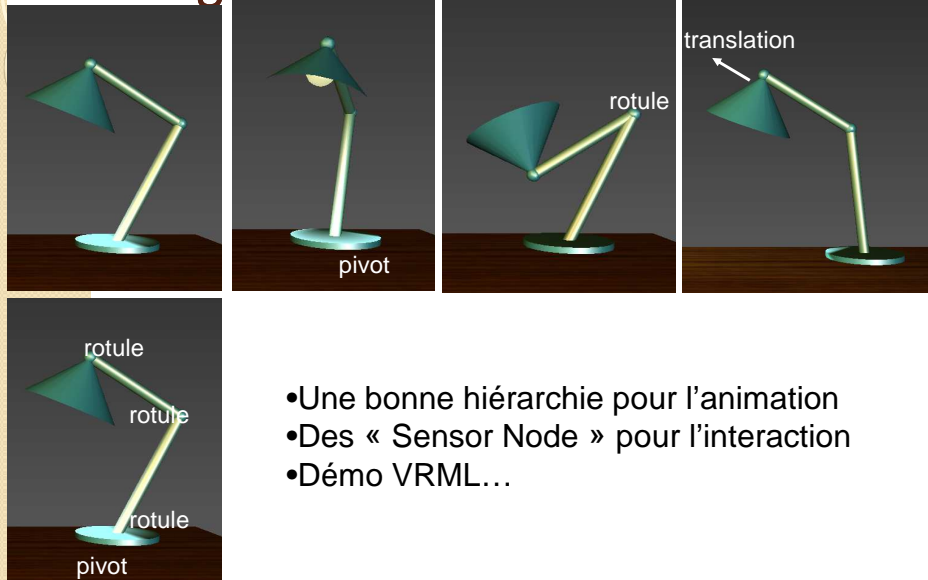
Mécanisme automatique de rendu multi-résolution



ScreenArea(1600,100)



Scène graph pour l'animation



- Une bonne hiérarchie pour l'animation
- Des « Sensor Node » pour l'interaction
- Démo VRML...

Modélisation-géométrique - O.Stab

20

3. LES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES

Modélisation-géométrique - O.Stab

21

Exemple de la modélisation solide

« Un modèle géométrique solide est une représentation mathématique (non ambiguë et complète) de la forme d 'un objet physique afin de le traiter sur ordinateur. »

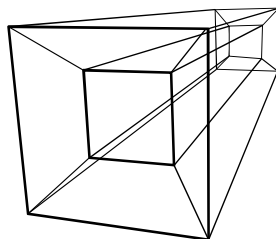
Mortenson 1985

Modélisation-géométrique - O.Stab

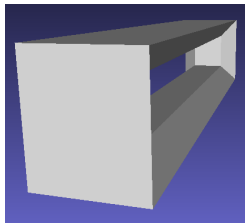
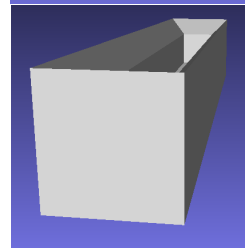
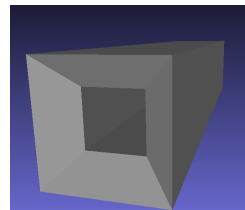
22

Représentation ambiguë

Exemple du « modèle fil-de-fer »

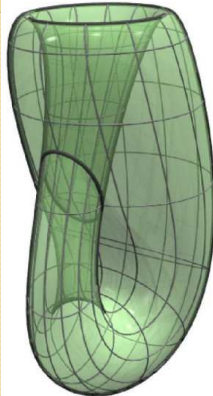


? Ambiguïté



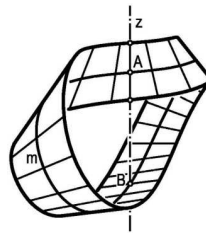
Quels objets ? solides rigides

- Déterminisme de frontière
- Description finie
- Rigidité
- Homogénéité
- Op. internes

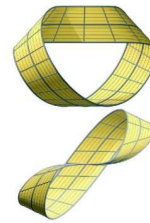


Bouteille de Klein

exclus



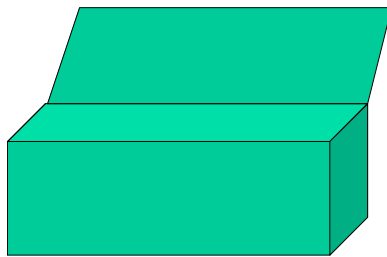
Ruban de Moëbius



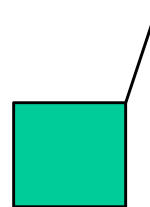
Modélisation-géométrique - O.Stab

25

Homogénéité, régularité



Objet non régulier en 3D



Objet non régulier en 2D

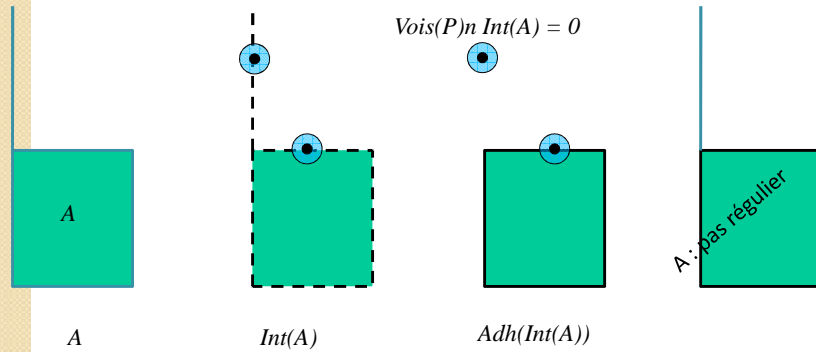
Modélisation-géométrique - O.Stab

26

Voisinage : Ensembles réguliers, frontière

(Topologie des ensembles connexes)

Un ensemble est régulier si il est égal à l'adhérence de son intérieur



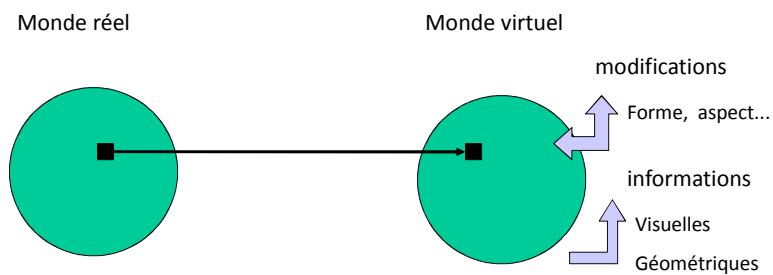
$$Fr(A) = Adh(A) - Int(A)$$

$$Fr(A) = Adh(A) \cap Adh(Comp(A))$$

$$\forall P \in Fr(A), \forall Vois(P), Vois(P) \cap A \neq \emptyset \text{ et } Vois(P) \cap Comp(A) \neq \emptyset$$

Frontière ?

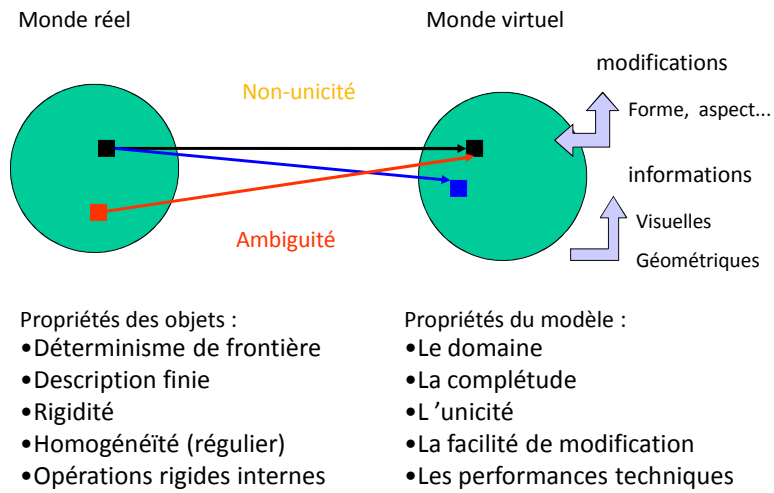
La démarche de modélisation



- Propriétés des objets :
- Déterminisme de frontière
 - Description finie
 - Rigidité
 - Homogénéité (régulier)
 - Opérations rigides internes

- Propriétés du modèle :
- Le domaine
 - La complétude
 - L'unicité
 - La facilité de modification
 - Les performances techniques

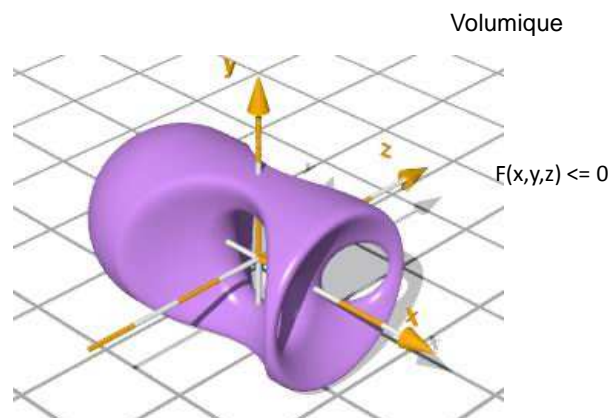
La démarche de modélisation



Modélisation-géométrique - O.Stab

29

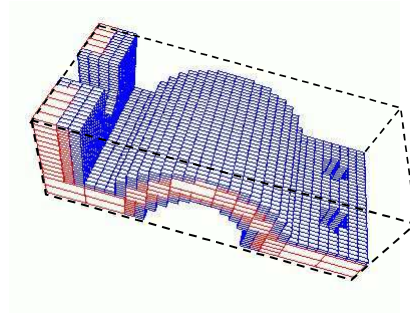
L'approche « Field » : $V \rightarrow F(x,y,z) < 0$



Modélisation-géométrique - O.Stab

30

L'énuation spatiale* : $V \rightarrow T(i,j,k)$



Espace borné
Voisinage explicite

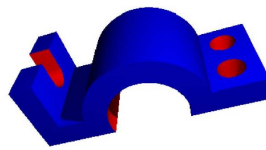
Voxel, Octree...

Attention : une partition de l'espace n'est pas un modèle d'énumération, il faut que ce dernier ai une structure

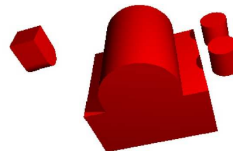
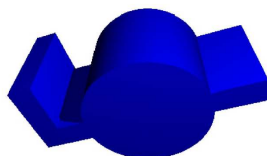
Modélisation-géométrique - O.Stab

31

L'approche constructive : $V = \{op\}$



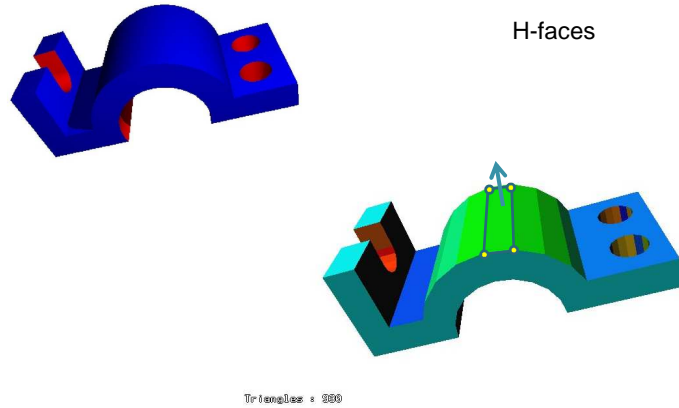
+ balayage
SOR etc...



Modélisation-géométrique - O.Stab

32

Le modèle frontière



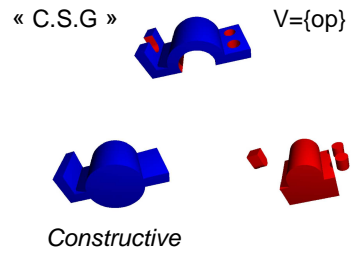
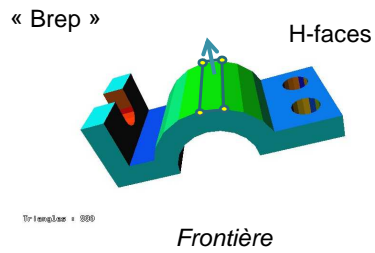
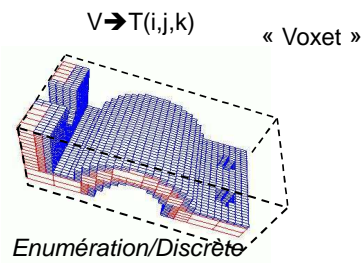
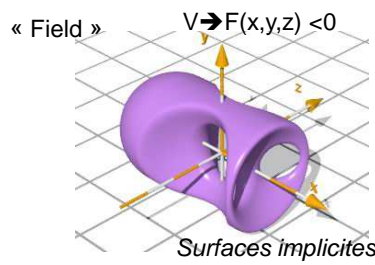
H-faces

Triangles : 200

Modélisation-géométrique - O.Stab

34

Les différentes approches



Modélisation-géométrique - O.Stab

35

Conversion des modèles

Algorithmes plus ou moins performants sur les modèles → intérêt de la conversion

Algo lent / inexistant

perte de sémantique

- Calculs massiques,
- Affichage ,
- ...

Algo efficaces

- Calculs massiques,
- Affichage ,
- ...

Modélisation-géométrique - O.Stab 37

Conversion des modèles

Modèles « rudimentaires » difficiles à manipuler → intérêt de la conversion (reconstruction)

ajout de sémantique

Manipulation difficile

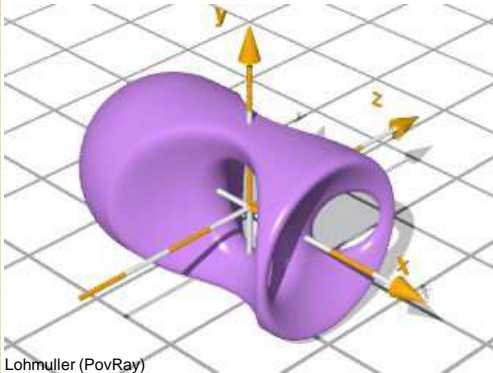
Modélisation-géométrique - O.Stab 38

3.1. DE L'APPROCHE « DISTANCE FIELD » A L'APPROCHE CONSTRUCTIVE

Modélisation-géométrie - O.Stab 42


Approche « Distance Field » ou surfaces implicites

$f(x,y,z) \leq 0$

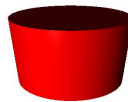


Lohmuller (PovRay)

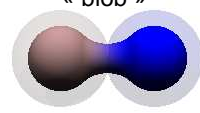
surfaces algébriques



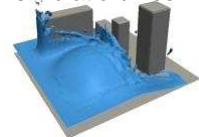
volumes élémentaires



« blob »



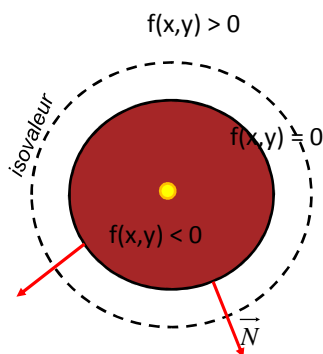
simulation/mesh



Modélisation-géométrie - O.Stab 43

Fonction algébrique implicite, champs scalaire, distance...

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2} - r$$



$P(x,y)$ dans ?

Intersection Dr ?

$$x(u) = a_0 u + b_0$$

$$y(u) = a_1 u + b_1$$

Normale sur la frontière ?

$$\vec{N} = \text{grad}(f)$$

La fonction donne la « distance signée » au cercle

Distance Field

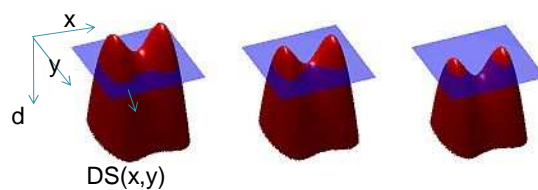
$DS(x,y,z)$ donne la distance signée à la frontière S

Frontière: $DS(x,y,z) = 0$, intérieur : $DS(x,y,z) < 0$, extérieur : $DS(x,y,z) > 0$



Exemple 2D

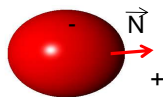
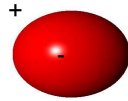
Dilatation
Animation...



Terminologie : surface équipotentielles (ou de niveau), Level Set

Surfaces algébriques: $DS(x,y,z)=0$

Positif à l'extérieur



$DS(x,y,z)$ donne la distance à la surface S
 Surface : $DS(x,y,z) = 0$,
 intérieur : $DS(x,y,z) < 0$,
 extérieur : $DS(x,y,z) > 0$

Exemples :

$$DS(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - r$$

$$DS(x,y,z) = z - h$$

$$DS(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$$

Surface quadrique : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$

Surface quartic :
 $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$

$$\vec{N} = \text{grad}(DS) = \begin{pmatrix} \partial DS / \partial x \\ \partial DS / \partial y \\ \partial DS / \partial z \end{pmatrix}$$

Point dans ? Volume ? Intersection ? ...

46

PovRay : Surfaces polynomiales



quadric { <A,B,C>, <D,E,F>, <G,H,I>, J }

• Quadriques:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 +$$

$$2Dxy + 2Eyz + 2Fzx +$$

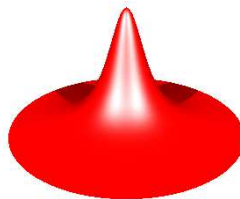
$$2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Ellipsoïde, cylindre, parabolôïde, cône...

Mais aussi : *cubic*{ $A_1 \dots A_{20}$ }


quadric { $A_1 \dots A_{35}$ }

poly{ $A_1 \dots A_n$ }

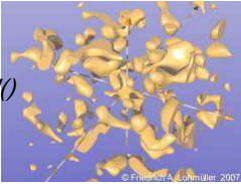


Fonctions prédéfinies : *f_dupin_cyclid()* mais aussi des primitives (torus...)

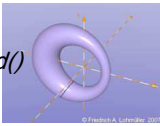
PovRay : Isosurface



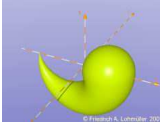
f_noise3d()



f_dupin_cyclid()



f_comma()



```

isosurface{ //-----
function { f_noise3d( x*2, y*2, z*2)-0.3 }
threshold 0.0
accuracy 0.002
max_gradient 4
contained_by{ box{-2,2} }

texture{ pigment{ color rgb<1,0.6,0.1>}
finish { phong 1 reflection 0.2 }
} // end of texture

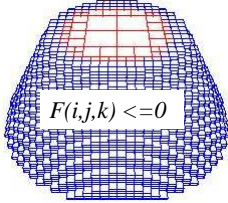
scale <1,1,1>*0.65
rotate <90,0,0>
translate <0,0,0>
} // end of isosurface -----
                    
```

Source : <http://www.f-lohmueller.de>


Modélisation-géométrique - O.Stab 53

3.2 Modèle d'énumération spatial


La version discrète : $F(i,j,k)=V_{ijk}$



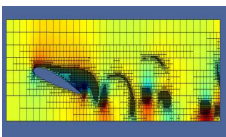
Résultat d'une saisie : image 3D...



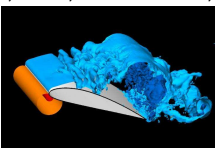
seuil →



Ou résultat d'une simulation (DF, MEF, écoulement,...)



seuil →



- **Morphologie**
- **Mathématique,**
- **Traitement**
- **d'image,**
- **Géométrie**
- **discrète**

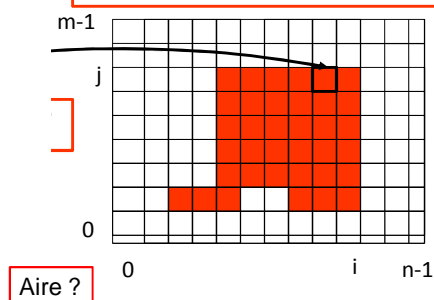
Modélisation-géométrique - O.Stab 62

Géométrie discrète (images)

D : dimension de l'espace

Représentation informatique:
un tableau de dimension D

TAB(i(x),j(y)) = plein ?

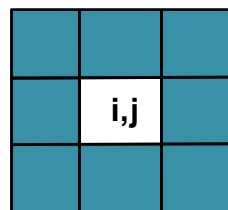
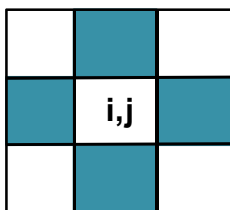


Modélisation Géométrique - O.Stab

64

Topologie et voisinage

- Voisinage : 4 connexité
- Voisinage : 8 connexité



Adhérence : $C(i,j)$ adhérent à X si son voisinage intersecte X

Intérieur : $C(i,j)$ intérieur à X si son voisinage strictement inclus dans X

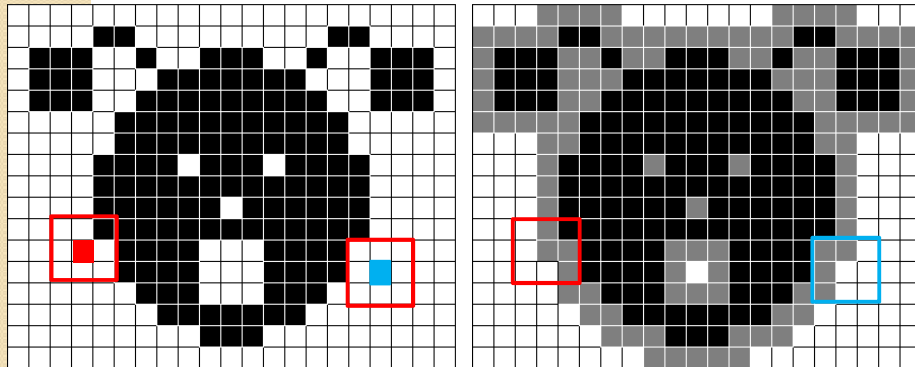
Frontière : $C(i,j)$ de X appartient à la frontière ssi son voisinage intersecte $Comp(X)$

Dilatation

$$\delta_B(X)$$

La dilatation morphologique de X avec un élément structurant B est définie comme la somme de Minkowski avec cet élément

$$\delta_B(X) = X \oplus B \quad \delta_B(X) = \{x \mid \tilde{B}_x \cap X \neq \emptyset\}$$



(from wikipedia)

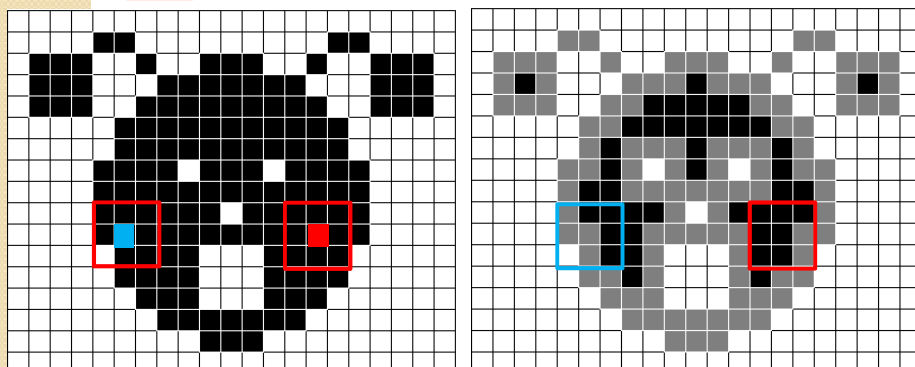
Sur cet exemple c'est aussi l'Adhérence pour le 8-voisinage

Erosion

$$\varepsilon_B(X)$$

L'érosion morphologique avec un élément structurant B est définie comme l'ensemble des points de X qui contiennent B .

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \{x \mid B_x \subset X\}$$

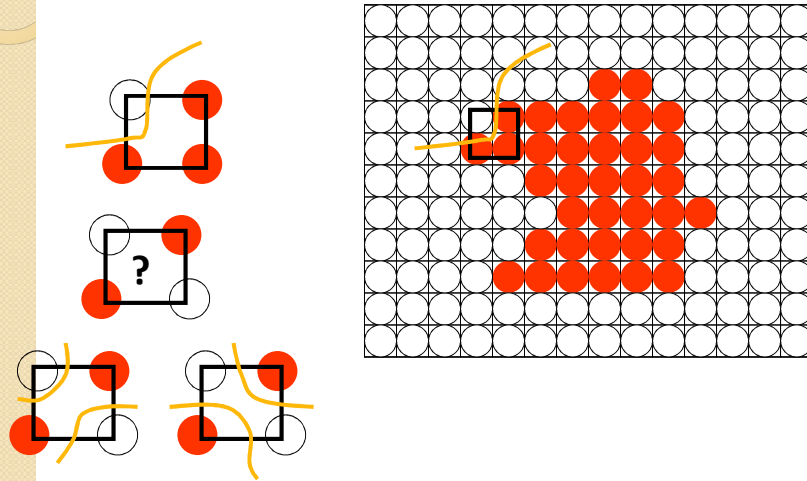


(from wikipedia)

Sur cet exemple c'est aussi l'Intérieur pour le 8-voisinage et en gris la Frontière

Enumération → Brep

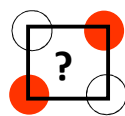
Le Marching Cube (3D) – extraction d'isopotentielles ...



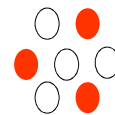
Modélisation Géométrique - O.Stab

71

Un problème topologique

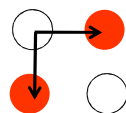


6-connexité

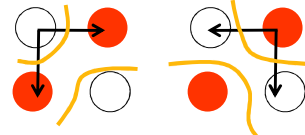


Voisinage :

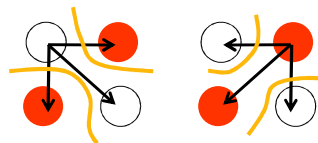
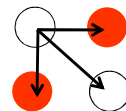
◦ 4-connexité



$Fr(A) \neq Fr(Compl(A))$

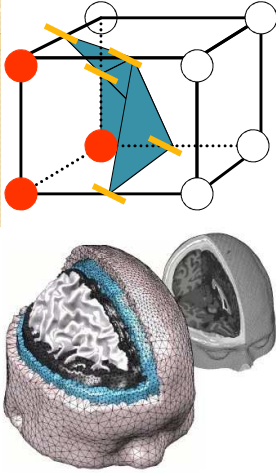


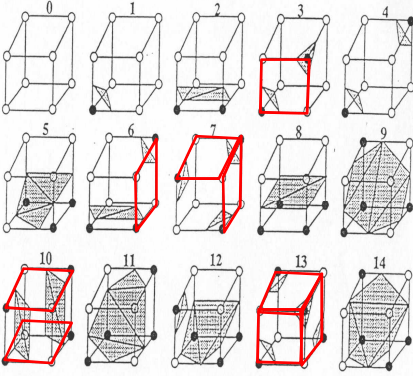
◦ 8-connexité



Le Marching Cube (MC)

Extraction d'une Brep à partir d'un voxel (ou d'une série d'images)

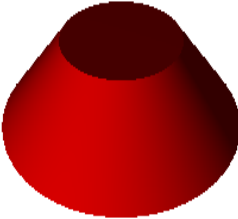




Modélisation Géométrique - O.Stab 73

Field → Enumération

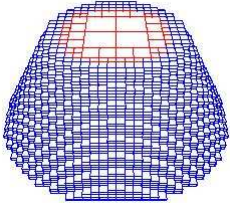
Cas complexes : pas de paramétrage naturel



$F(x,y,z) = 0$

Algorithme

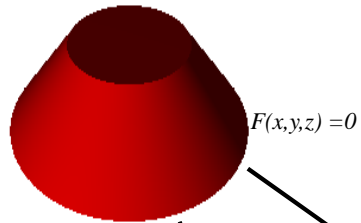
1. ...
2. ...
3. ...



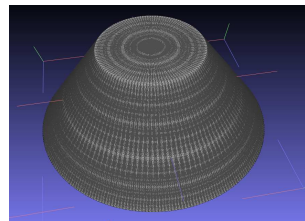
Modélisation-géométrique - O.Stab 74

Field → Enumération

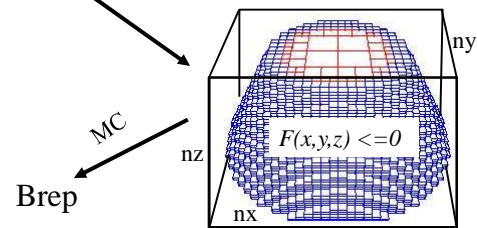
Cas complexes : pas de paramétrage naturel



1. Calcul* de la boîte d'encombrement
2. Découpage (nx,ny,nz)
3. Calcul de $F(x_i,y_i,z_i)$, centre des cellules**...



*ou donné ** par exemple

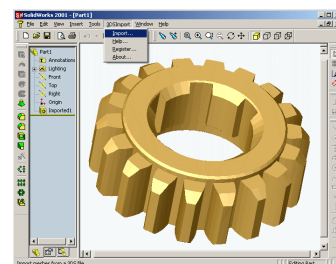


Modélisation-géométrique - O.Stab

75

3.2. OPERATEURS & STRUCTURES

- Opérations booléennes régularisées (CAO)
- Fonctions de mélange... (organique)
- 1D → 2D → 3D par balayage ou interpolation
- Structures arborescentes...



Modélisation-géométrique - O.Stab

76

L'approche constructive : $V = \{op\}$

Modélisation géométrique et maillage 79

Principe des opérations booléennes

Volumes élémentaires
(surfaces implicites)

*Opérations booléennes (régularisée)

80

Exemple

```

Union {
  union {
    box { <0,0,0 <107,48,11> }
    box { <0,0,0 <11,48,25> } translate <96,0,11>
  }
  cylinder { <0,0,0 <0,48,0> 30 translate <53.5,0,5.5> }
}
        
```

« Construction » des volumes élémentaires

Q1.1 :Comment représenter le cylindre?

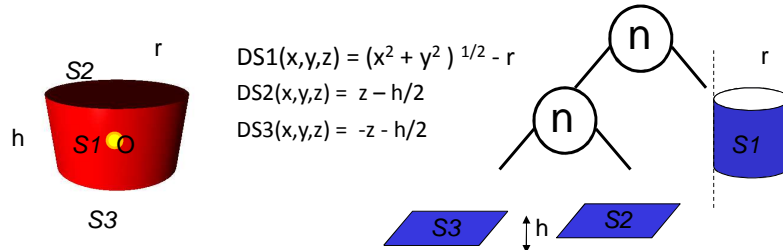
Q1.2 Donner la proposition qui exprime l'appartenance d'un point au cylindre ?

Modélisation-géométrique - O.Stab 82

« Construction » des volumes élémentaires

Q1.1 :Comment représenter le cylindre à partir des surfaces implicites ?

surfaces algébriques → ½ espaces

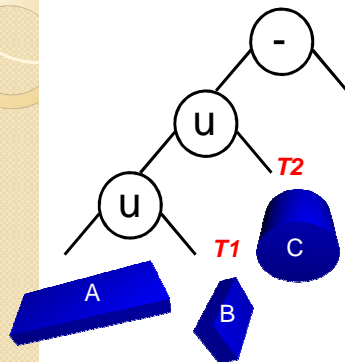


Q1.2 Donner la proposition qui exprime l'appartenance d'un point au cylindre ?

$$P(x,y,z) \in \text{Cyl} \Leftrightarrow (DS1(x,y,z) \leq 0) \text{ ET } (DS2(x,y,z) \leq 0) \text{ ET } (DS3(x,y,z) \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow (DS_{\text{cyl}}(x,y,z) \leq 0) \text{ avec } DS_{\text{cyl}}(x,y,z) = \max(DS1(x,y,z), DS2(x,y,z), DS3(x,y,z))$$

Distribution des traitements



- les primitives
- les transformations
- la structure d'arbre avec opérateurs

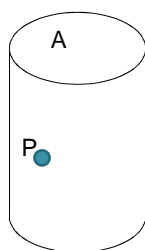
```
Union {
  union {
    box { <0,0,0> <107,48,11> }
    box { <0,0,0> <11,48,25> } translate <96,0,11>
  }
  cylinder { <0,0,0> <0,48,0> 30 translate <53.5,0,5.5>
}
```

$$O = (((... (A \cup (T_1(B)) \cup T_2(C)) - (...))$$

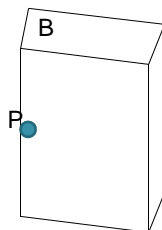
- $P \in O ?$
- $Dr \cap O = ?$
- $Fr(O) = ?$

Localisation d'un point

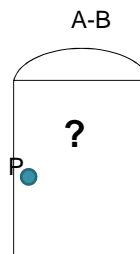
Principe : réflexion sur un exemple



$$P \in A$$



$$P \in B$$

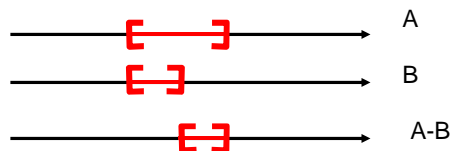
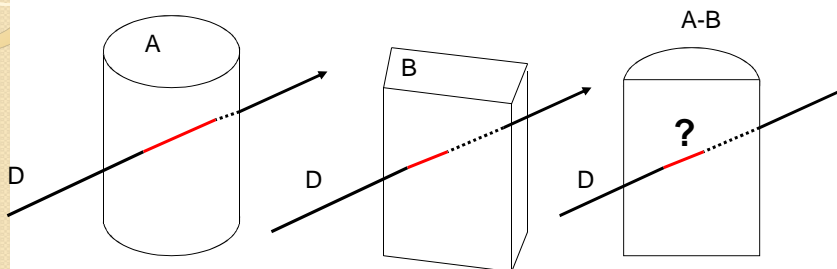


$$P \in (A - B)?$$

$$P \in (A - B) \Leftrightarrow (P \in A) \text{ et } (P \notin B)$$

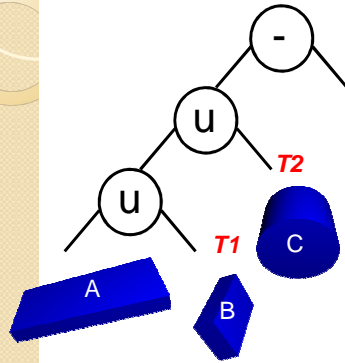
Intersection avec une droite

Principe : réflexion sur un exemple



$$D \cap (A - B) = (D \cap A) - (D \cap B)$$

Distribution des traitements



- les primitives
- les transformations
- la structure d'arbre avec opérateurs

```

Union {
  union {
    box { <0,0,0> <107,48,11> }
    box { <0,0,0> <11,48,25> } translate <96,0,11>
  }
  cylinder { <0,0,0> <0,48,0> 30 translate <53.5,0,5.5>
}
    
```

$$O = ((...(A \cup (T_1(B)) \cup T_2(C)) - (...))$$

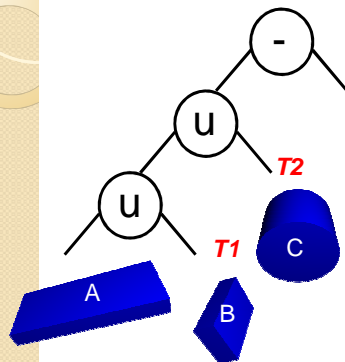
$$P \in O \Leftrightarrow ((...(P \in A) \text{ ou } (T_1^{-1}(P) \in B)) \text{ ou } (T_2^{-1}(P) \in C)) - (...)$$

$$Dr \cap O = ((...(Dr \cap A) \cup T_1(T_1^{-1}(Dr) \cap B)) \cup T_2(T_2^{-1}(Dr) \cap C)) - (...)$$

$$Fr(O) = ((...Fr(A) \cup_{Fr}^* T_1(Fr(B)) \cup_{Fr}^* T_2(Fr(C)) -_{Fr}^* (...)$$

88

Distribution des traitements



- les primitives
- les transformations
- la structure d'arbre avec opérateurs

```

Union {
  union {
    box { <0,0,0> <107,48,11> }
    box { <0,0,0> <11,48,25> } translate <96,0,11>
  }
  cylinder { <0,0,0> <0,48,0> 30 translate <53.5,0,5.5>
}
    
```

$$O = ((...(A \cup (T_1(B)) \cup T_2(C)) - (...))$$

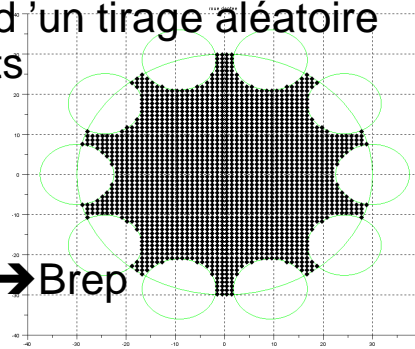
Volume(O)?

89

Calcul du volume

- Pas de solution simple, générale et précise
- Estimation à partir d'un tirage aléatoire ou régulier de points

Tirage est régulier :
CSG → énumération spatiale.



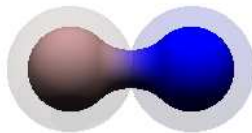
- Conversion : CSG → Brep

« Blob » ou Metaball

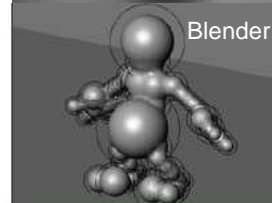
ou surfaces de potentiel

$$density^* = strength \cdot \left(1 - \left(\frac{distance}{radius}\right)^2\right)^2$$

if (density > threshold) then INSIDE



Maya



Blender

Reformuler pour obtenir une expression :

Surface : $DS(x,y,z) = 0$,

intérieur : $DS(x,y,z) < 0$,

extérieur : $DS(x,y,z) > 0$

$$DS(x,y,z) = S - T * (1 - (d_E(x,y,z)/R)^2)^2$$

Définir (S, T, R, E) pour une sphère, pour un cylindre...

$$S = (1 - (r/R)^2)^2, T = 1, R \gg r, E = \text{centre (sphère) ...}$$



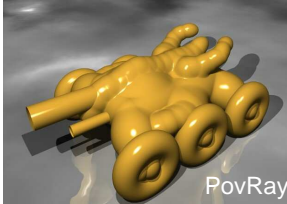
*Fonction de densité de Murakami

Assemblage de « BLOB »

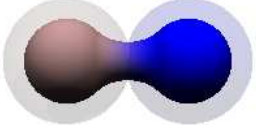
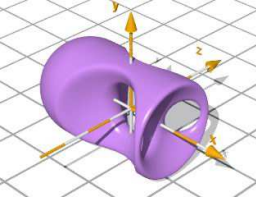
Exemples PovRay

```

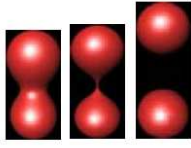
blob {
  threshold seuil_force
  sphere { < P1_centre>, rayon_sphere1 , strength force1_centre }
  sphere { < P2_centre>, rayon_sphere2 , strength force2_centre }
  cylinder { ... }
  ...
}
    
```



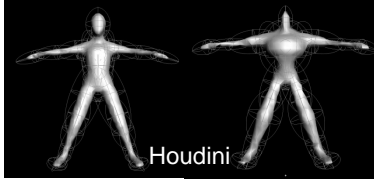
PovRay

force_centre < 0




Blender



Houdini
Houdini, Side Effect Software Inc.

Modélisation-géométrique - O.Stab 108

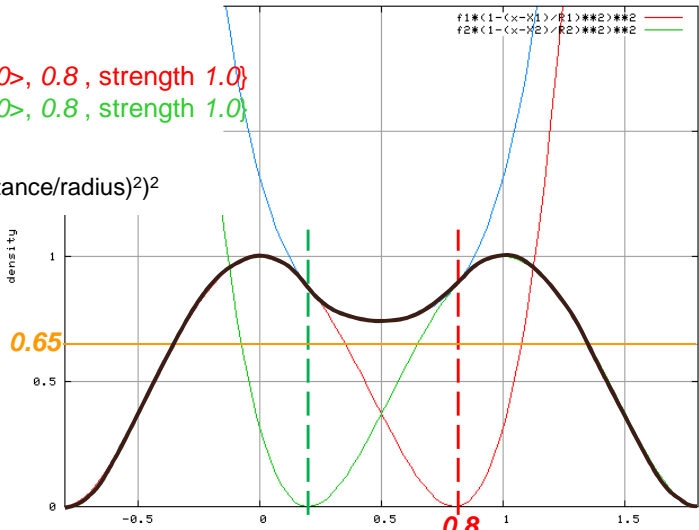
Fonction « BLOB »



```

blob {
  threshold 0.65
  sphere { < 0,0,0>, 0.8 , strength 1.0 }
  sphere { < 1,0,0>, 0.8 , strength 1.0 }
}
    
```

$D = \text{strength}(1 - (\text{distance}/\text{radius})^2)^2$




density

0.65

0.8

Modélisation-géométrique - O.Stab 110

Fonction « BLOB »

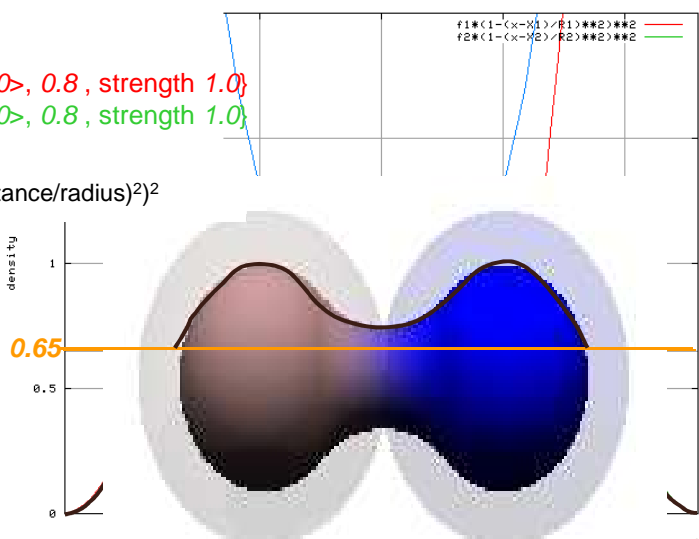


PovRay

```

blob {
  threshold 0.65
  sphere { < 0,0,0>, 0.8, strength 1.0}
  sphere { < 1,0,0>, 0.8, strength 1.0}
}
    
```

$D = \text{strength}(1 - (\text{distance}/\text{radius})^2)^2$



111

Opérations

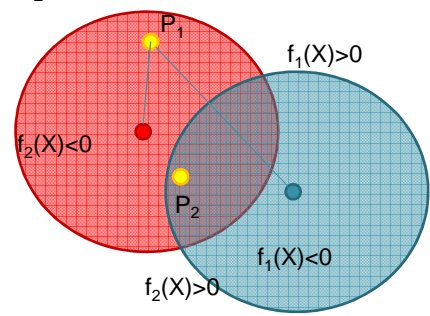
- Fonctions de potentiel* : Blinn, Murakami...
- Fonctions de mélange : $f(P) = \sum f_i(P)$...
- $\text{inter}(f_1, f_2) = \max(f_1(P), f_2(P))$ *Avec la convention :
intérieur < 0*
- $\text{union}(f_1, f_2) = \min(f_1(P), f_2(P))$
- $\text{différence}(f_1, f_2) = \max(f_1(P), -f_2(P))$
- R-fonctions [Pasko] :

$$\bigcup_{\alpha}(F_1, F_2) = \frac{1}{1+\alpha}(F_1 + F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\alpha F_1 F_2})$$

$$\bigcap_{\alpha}(F_1, F_2) = \frac{1}{1+\alpha}(F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\alpha F_1 F_2})$$

Avec paramètre $\alpha \in [0, 1]$


* voir J.L.Mari 2006



Modélisation-géométrique - O.Stab 112

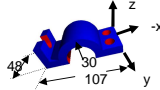
BILAN

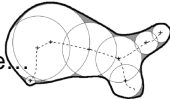
Approche constructive avec surfaces implicites




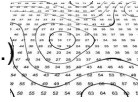
- Opérations booléennes & volumes élémentaires
 - Approche CAO, simple et naturelle
 - Richesse vient des primitives
 - Animation : arborescence => corps articulés
 - PB : volume, régularisation (topologique)

- Variantes
 - Nombreuses : distance, densité, fonctions de mélange...
 - Approche synthèse d'image, empirique, intuitif
 - Avantages : calculs simples (pt? inter?)
 - continuité de la surface (pas de pb topologie)
 - représentation très compacte
 - applications : animation d'objets déformables, sculpture virtuelle, habillage de squelettes ...
 - PB : pas toujours de représentation paramétrique, affichage délicat, maillage difficile (Marching Cube etc...)





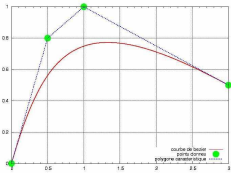





Modélisation-géométrique - O.Stab 116

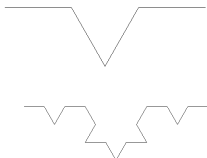
3.3 Autres approches constructives


- points → courbes → surfaces





- L*-system
 - $0 \rightarrow F$
 - $F \rightarrow F+F-F-F+F$





*Lindenmayer

Modélisation-géométrique - O.Stab 117

Courbes polynomiales : principe

Une courbe polynomiale paramétrique contrôlée par les points

$$\begin{cases} x(u) = a_0 * u + b_0 \\ y(u) = a_1 * u + b_1 \end{cases}$$

Résolution système linéaire

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_0 \\ y_1 - y_0 & y_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1-u \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$$

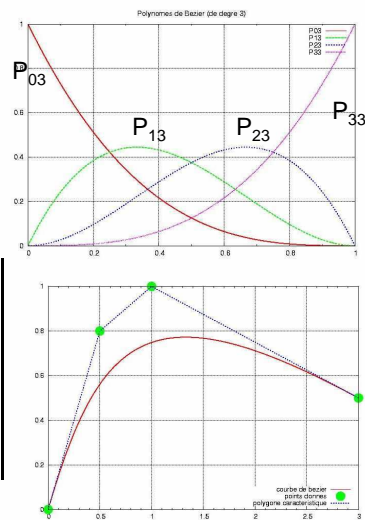
$$X(u) = \sum_{i=0}^m X_i P_{im}(u)$$

Exemple : la courbe de Bézier


$$X(u) = \sum_{i=0}^m X_i P_{im}(u)$$

$$P_{im}(u) = \frac{m!}{(m-i)! i!} u^i (1-u)^{m-i}$$

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$



Carreau de Bezier 4x4



$$X(u,v) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 X_{ij} P_{im}(u) P_{jn}(v)$$

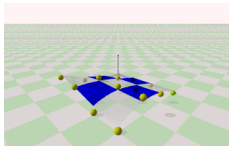
```


bicubic_patch {
  type      1
  u_step   3
  v_steps  3
}
    
```

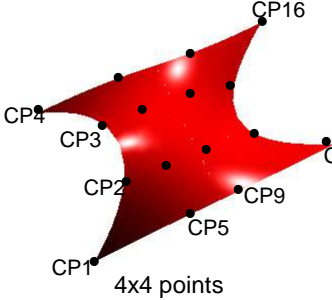
} 2³*2³ petits carreaux

```

<CP1>, <CP2>, <CP3>, <CP4>,
...
<CP13>, <CP14>, <CP15>, <CP16>
}
    
```








4x4 points


Constructeurs : S.O.R



S.O.R : Surface de révolution autour d'un axe

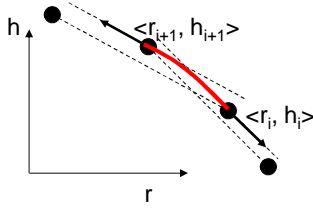
```

sor {
  nb_pt,
  <r1, h1>
  ...
  <ri, hi>
  open
}
    
```



$$r(h)^2 = a h^3 + b h^2 + c h + d$$

$$SOR \begin{cases} X^2 + Y^2 = r^2 \\ r^2 = aZ^3 + bZ^2 + cZ + d \end{cases}$$

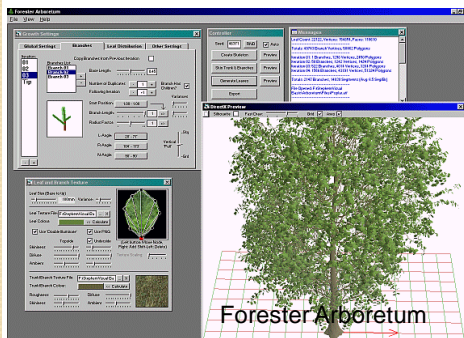
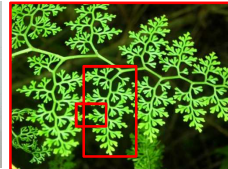


Intersection avec une droite => équation du 3^{ème} ordre :

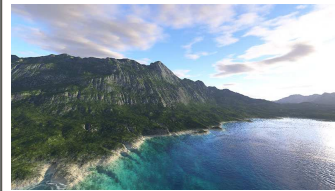


Fractales, L-system et approches procédurales

- Les fractales dans la nature
- Auto-réplication parfaite ou avec aléas...
- L-system : DOLsystem / SOL Deterministic-O-context / Stochastic-O-context



Logiciels : Forest
Arboretum, Virtual
Terrain Project, plug-in
Maya, Lightwave etc...



*L : Lindenmayer

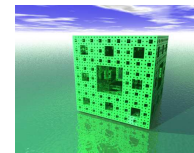
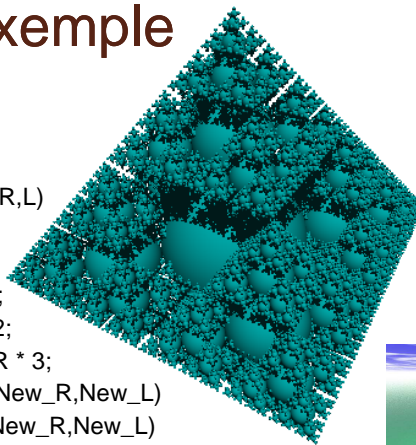
Modélisation-géométrique - O.Stab

124

PovRay : exemple



```
#macro Pyramid(X,Y,Z,R,L)
sphere { <X,Y,Z>,R}
#if (L > 0)
#local New_L = L - 1;
#local New_R = R / 2;
#local Pos = New_R * 3;
Pyramid(X+Pos,Y,Z,New_R,New_L)
Pyramid(X-Pos,Y,Z,New_R,New_L)
Pyramid(X,Y+Pos,Z,New_R,New_L)
Pyramid(X,Y-Pos,Z,New_R,New_L)
Pyramid(X,Y,Z+Pos,New_R,New_L)
#end
#end
```



(Thomas 2008)

